Musterlösungen
2. Vordiplom
Mathematik III: Analysis
(D-ERDW)

1. a) Niveaulinie von f zum Niveau 8: $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | f(u,v) = 8\}$.

$$f(u,v) = 8 \Leftrightarrow u = 2 + v^2$$

Die Niveaulinie von f zum Niveau 8 ist eine Parabel auf dem vu-Ebene mit dem Minimum in $(0,2)$.

b)

$$\nabla f(u,v) = (\frac{\partial}{\partial u} f(u,v), \frac{\partial}{\partial v} f(u,v))^T = 3(u-v^2)^2(1,-2v)^T$$
$$\nabla f(1,2) = 27(1,-4)^T$$

c) Richtungsableitung von f in $P(1,2)$:

$$< \nabla f(P(1,2)), v >= 27 < (1,-4)^T, (v_1,v_2)^T >= 27(v_1 - 4v_2),$$

wobei $v = (v_1, v_2)^T$ und $|v| = 1$. Die Funktion f bleibt konstant falls die Richtungsableitung gleich Null ist, d.h. für $v_1 = 4v_2$, also im Richtung $\pm(4,1)^T$.

Die Richtungsableitung

$$< \nabla f(P(1,2)), v >= |\nabla f(P(1,2))| \cos \angle(\nabla f(P(1,2)), v)$$

ist minimal für $\cos \angle(\nabla f(P(1,2)), v) = -1$. Stärkste Abnahme in Richtung $-\nabla f(1,2)$.

d) Kritischen Punkte von f: $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ mit $\nabla f(u,v) = 0$.

$$\nabla f(u,v) = 0 \Leftrightarrow (u - v^2) = 0 \Leftrightarrow u = v^2$$

(Parabel, Niveaulinie zum Niveau 0). In den kritischen Punkte ($u = v^2$) ist die Funktion f gleich Null. Für $u > v^2$ ist die Funktion positiv und für $u < v^2$ ist negativ. Es handelt sich also um Sattelpunkte.

e) Linearisiere

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$
$$(u,v) \mapsto \tilde{f}(u,v) = (u,v,f(u,v))$$

bei $(u_0, v_0) = Q(0,1)$.
Tangentialebene an das Bild von $Q(0,1)$:

$$L(u,v) = \tilde{f}(u_0,v_0) + d\tilde{f}(u_0,v_0)(u-u_0, v-v_0)^T$$
$$= (0,1,f(0,1)) + \ = (u,v,3u-6v+5)^T$$

Es folgt dass $f(0.1, 0.9) \approx 3 * 0.1 - 6 * 0.9 + 5 = -0.1$

Bitte wenden!

f) Die Ebene $\{x = y\}$ wird auf gespannt durch $(1,1,0)^T$ und $(0,0,1)^T$. Ebene ist senkrecht zu $(-1,1,0)$.

$$\begin{aligned}\dot{g}(t)(-1,-1,0)^T = 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{3}t^{-2/3} + \frac{1}{3}t^{-1} = 0, \quad t > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}t^{-1}(1 - t^{1/3}) = 0, \quad t > 0 \\ &\Leftrightarrow t^{1/3} = 1 \Leftrightarrow t = 1\end{aligned}$$

$g(1) = (1,0,3)^T$

g) $g(f(u,v))$ ist definiert auf $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > v^2\}$,

$$h(u,v) = g(f(u,v)) = (u - v^2, \ln(u - v^2), 3)^T$$

$$\Rightarrow dh(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & -2v \\ \frac{1}{u-v^2} & \frac{-2v}{u-v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kettenregel:

$$dh(u,v) = dg(f(u,v))df(u,v) = \begin{pmatrix} 1/3((u-v^2)^3)^{-2/3} \\ 1/3(u-v^2)^{-3} \\ 0 \end{pmatrix} (3(u-v^2)^2, -6v(u-v^2)^2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2v \\ \frac{1}{u-v^2} & \frac{-2v}{u-v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

2. **a)** $D_{(F)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y \geq 0, z > 0\}$ ist einfach zusammenhängend.
$\partial D_{(F)} = \{z = 0, y \geq 0\} \cup \{y = 0, z \geq 0\}$ ist zusammenhängend.

$D_{(F)}$ ist einfach zusammenhängend und

$$rot\ F(x, y, z) = (\partial_y F_3 - \partial_z F_2, \partial_z F_1 - \partial_x F_3, \partial_x F_2 - \partial_y F_1)^T = (0, \frac{y}{x}, -\ln z)^T \neq 0$$

Es folgt dass F kein Potentialfeld ist.

b) $div(rotF) = \partial_x(0) + \partial_y(\frac{y}{z}) + \partial_z(-\ln z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} - 0 = 0.$

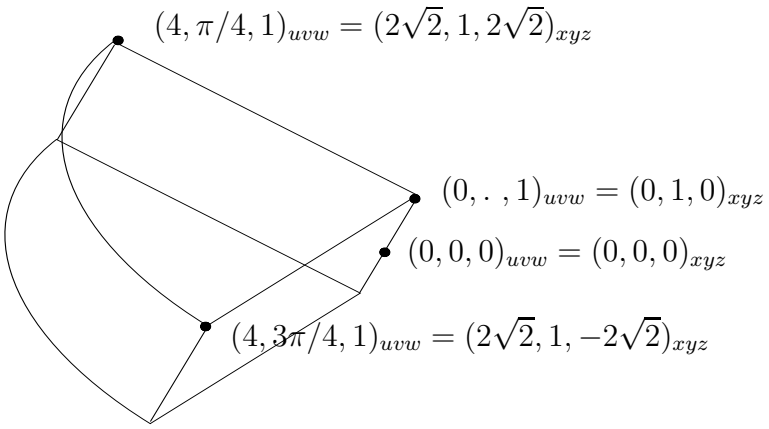
c) $f \in C^2$; $rot(\nabla f) = (\partial_y\partial_z f - \partial_z\partial_y f, \partial_z\partial_x f - \partial_x\partial_z f, \partial_x\partial_y f - \partial_y\partial_x f) = (0, 0, 0)$

d) $div(rotF) = \partial_x(\partial_y F_3 - \partial_z F_2) + \partial_y(\partial_z F_1 - \partial_x F_3) + \partial_z(\partial_x F_2 - \partial_y F_1) = 0$, wo $F \in C^2$.

Bitte wenden!

3. a)

$$x = u \sin v$$
$$y = w$$
$$z = u \cos v$$



b) Setze $\varphi(u, v, w) = (u \sin v, w, u \cos v)^T$

$$d\varphi(u, v, w) = \begin{pmatrix} \sin v & u \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos v & -u \sin v & 0 \end{pmatrix}$$

$det\ d\varphi(u, v, w) = u$

$$\begin{aligned} \int\int\int_{D_{xyz}} f(x, y, z)\ dx\ dy\ dz &= \int\int\int_{D} f(\varphi(u, v, w))|detd\varphi(u, v, w)|\ du\ dv\ dw \\ &= \int_0^4 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{-1}^{1} (u^2 + w^2)u\ dw\ dv\ du \\ &= \pi/2 \int_0^4 u^3 2 + u2/3\ du = \pi \frac{1}{4} 4^4 + \frac{\pi}{3} \frac{1}{2} 4^2 = \pi(64 + 8/3) \\ &= \frac{200\pi}{3} \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

4. **a)** Mögliche Parametrisierung:

$$\gamma_1(t) = (t,0,0)^T, \quad \dot{\gamma_1}(t) = (1,0,0)^T, \quad t \in [0,1]$$
$$\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T, \quad \dot{\gamma_2}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)^T, \quad t \in [0,\pi/2]$$
$$\gamma_3(t) = (0,1-t,0)^T, \quad \dot{\gamma_3}(t) = (0,-1,0)^T, \quad t \in [0,1]$$

Im Gegenuhrzeigersinn:

$$\int_\gamma F ds = \int_0^1 (0,t,0)^T (1,0,0)^T dt + \int_0^{\pi/2} (-\sin t, \cos t, 0)^T (-\sin t, \cos t, 0)^T dt$$
$$- \int_0^1 (-t,0,0)^T (0,-1,0)^T dt = \pi/2$$

Mit Stokes:

$$\int_{\partial B} \mathbf{F}\ d\mathbf{s} = \int\int_B rotF\ d\sigma$$

$rotF(x,y,z) = (0,0,2)^T$

$$\int_B rotF(x,y,z)(0,0,1)^T dxdy = 2\frac{1}{4}(Flaeche\ Einheitskreisscheibe) = 2\frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{2}$$

b)

$$\int\int_{RandTetraeder} F\ \mathbf{n} d\sigma = \int\int\int_{Tetraeder} \underbrace{divF}_{=3}\ dxdydz = 3\underbrace{Volumen(Tetraeder)}_{1/6} = \frac{1}{2}$$